FROIDEVAUX Loïc

Référence : Brézis, Analyse Fonctionnelle.
Leçon : 201 - 205 - 208 - 234 (évidemment !) - 235 ? -

THÉORÈME DE RIESZ-FISCHER.

Théorème : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.
Soit $p \in [1;\infty]$. Alors $(L^p_\mu(\Omega); \|\cdot\|_p)$ est un Banach
(μ mesure de Lebesgue).

preuve : • Cas $p = \infty$:
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^\infty_\mu(\Omega)$.
$\forall k \geq 1, \exists N_k > 0, \forall n \geq N_k, \forall q > 0, \|f_{n+q} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$
Ainsi, $\exists E_k$ ensemble négligeable de Ω tel que :
$$\forall n \geq N_k, \forall q > 0, \forall x \notin E_k, |f_{n+q}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad (*)$$

On pose $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} E_k$: $\forall x \notin E$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}; |\cdot|)$ qui est complet donc $\forall x \notin E$,
$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \text{ avec } f : \Omega \to \mathbb{R}$$

De plus, dans $(*)$, lorsque $q \to \infty$, on obtient :
$$\forall x \notin E, \forall n \geq N_k, |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \quad [\text{COR}]$$
Précision manquante dans Brézis : Cela nous donne que $f \in L^\infty_\mu(\Omega)$: en effet, si $n_0 \geq N_k$:
$$|f(x)| \leq \frac{1}{k} + |f_{n_0}(x)| \text{ avec } f_{n_0} \in L^\infty_\mu(\Omega).$$

On obtient ainsi : $\forall k \geq 1\ \exists N_k > 0, \forall n \geq N_k, \|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$
donc $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_\infty} f$: $(L^\infty_\mu(\Omega); \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

• Cas $1 \leq p < \infty$:
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(L^p_\mu(\Omega); \|\cdot\|_p)$

NON FAIT DANS BRÉZIS

Il existe une extraction φ tq $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie
$\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_p < 2^{-n}$. En effet pour $n = 1$,
$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_1, \|f_p - f_q\| < \frac{1}{2}$. On prend $\varphi(1) = N_1$
Supposons $\varphi(1) \dots \varphi(n)$ construits
$\exists N_{n+1}, \forall p, q \geq N_{n+1}, \|f_p - f_q\|_p < 2^{-(n+1)}$. On pose

$\varphi(n+1) = \max(N_{n+1}, \varphi(n)+1)$ ce qui donne le résultat voulu (en particulier, φ est bien strictement croissante).

On pose pour $k \in \mathbb{N}^*$, $g_k : x \longmapsto \sum_{i=1}^{k} |f_{\varphi(i+1)}(x) - f_{\varphi(i)}(x)|$

$g_k \in L^p$ en tant que somme finie de fonctions L^p

De plus, $\|g_k\|_p \leq \sum_{i=1}^{k} \|f_{\varphi(i+1)} - f_{\varphi(i)}\|_p < 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

et $(g_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. De là, par le théorème de convergence monotone, on a $g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x)$ presque-partout (p-p) avec $g \in L^p$ et $\|g\|_p \leq 1$

(et $\|g - g_k\|_p \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$)

Ainsi, $\forall m \geq n \geq 2$, on obtient :

$$|f_{\varphi(m)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)|$$

$$\leq g(x) - g_{n-1}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{p-p}$$

$(f_{\varphi(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc p-p une suite de Cauchy de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ complet, qui converge donc p-p vers $f(x)$ (avec $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$). $\boxed{\text{COR}}$

De plus $|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \leq g(x)$ p-p $(n \geq 2)$

précision à ajouter

donc $f \in L^p_\mu(\Omega)$ car on a $|f(x)| \leq |g(x)| + \underbrace{|f_{\varphi(n_0)}(x)|}_{\in L^p_\mu(\Omega)}$

Enfin, $|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ p-p

et $|f(x) - f_{\varphi(n)}(x)|^p \leq \underbrace{g^p(x)}_{\text{intégrable car dans } L^p_\mu(\Omega)}$ p-p

Donc d'après le théorème de CV dominée on a

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$$

donc $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_p} f$ et $(L^p_\mu(\Omega), \|\cdot\|_p)$ est complet $\square$

Au passage, on a montré la proposition suivante :

Proposition : De toute suite convergente de $L^p_\mu(\Omega)$ ($p \in [1;\infty]$), on peut extraire une suite qui CV p-p sur Ω

preuve : voir [COR]

Question : trouver une suite CV dans L^p qui ne CV pas p-p sur Ω.

Ça mérite 30 sec à l'oral de l'agrég, surtout qu'il n'y a aucun problème pour faire rentrer cette démo en 15 min.

Avantages \ Inconvénients :

- Facile et large en 15 min
- Pièges possibles dans les questions :
  - Qu'en est-il de $L^p_\mu(\mathbb{C})$?
  - pourquoi on prend une sous-suite ?
  - Si on prend une mesure σ-finie, est-ce toujours possible ?

  Donc faut pas trop se la couler douce non plus
- Attention à détailler l'extraction de la suite (ne pas faire comme Brézis qui saloppe le bordel).
- On peut utiliser le Lemme de Fatou plutôt que la CV monotone : avis aux amateurs de liminf ...